

# 弱耦合鸭解振荡器的同步

Elif Köksal Ersöz<sup>1</sup>, Mathieu Desroches<sup>2</sup>, and Martin Krupa<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>MYCENAE Project Team, Inria Paris, France

<sup>2</sup>MathNeuro Team, Inria Sophia Antipolis Méditerranée, 2004 route des Lucioles, 06902 Sophia-Antipolis Cedex, France

<sup>3</sup>Department of Applied Mathematics, University College Cork, Cork, Ireland

Received 29 September 2016; Received in revised form 12 January 2017; Accepted 27 February 2017; Available online 22 March 2017

## Abstract

在弱耦合振荡器的背景下, 使用所谓的相位响应曲线 (PRC) 对同步进行了广泛的研究, 该曲线测量了振荡器的相位变化如何受到小扰动的影响。这种方法是基于 Malkin 的工作, 并已扩展到弛豫振子。即在弱耦合假设下建立了同步条件, 得到了弱耦合弛豫振荡器同步解存在的判据。先前的分析依赖于这样一个事实, 即慢零斜线不会在它的一个折点附近与快零斜线相交, 在那里鸭解可能出现。本文利用数值延拓技术求解了伴随方程, 并证明了鸭解环的同步特性与经典弛豫环的同步特性不同。特别地, 我们强调了最大鸭解在分离两个不同的同步机制的一个新的特殊作用: Hopf 机制和弛豫机制。对经历鸭解爆炸的慢-快振子进行相平面分析, 可以解释这种同步特性在最大鸭解上的变化。

**关键词:** 鸭解; 相位响应曲线; 快-慢系统; 同步; 弱耦合

## 1 引言

同步本身就是一个研究课题, 它已经产生了大量的知识, 特别是所谓的弱耦合振荡器 [1-6]。在这种情况下, 一个经典的感兴趣的对象是 (无穷小) 相位响应曲线或 (i)PRC, 当沿着相关的稳定极限环解时, 它编码了一个小的扰动如何影响振荡器的相位。PRC 的推导依赖于系统沿无扰动 (即不耦合) 环的线性化, 并对应于伴随变分方程的解。当耦合强度足够小时, 伴随问题和 PRC 的解可以深入了解耦合振荡系统的同步特性 [3,5]。这些研究被统称为“弱耦合振荡器理论” [4]。这一理论与 Izhikevich 和 Hoppensteadt [4] 关于 Malkin [7,8] 的早期研究有关; 在 Roseau [10,11] 的基础上, [9] 给出了一个明确的证明。

弱耦合振子理论已被用于许多研究, 特别是研究慢参数, 潜在分岔和耦合强度对集群动力学的影响。在关于该内容的一篇开创性论文 [2] 中, 研究表明, 作为耦合参数的函数, 相位差中的叉型分岔出现了异相 (OP) 同步 (同相 (IP) 和反相 (AP) 解之间的中间模式)。在 i 型峰发放神经元模型中也发现了类似的分岔结构, 例如 [12-14]。最近另一项与 i 型膜相关的研究 [15] 关注的是通过间隙连接耦合的 Wang-Buzsaki models 链中从 IP 到 OP 同步状态的转换位置。利用相位模型和相互作用函数对这一转变作为系统固有性质的函数进行了分析和数值研究。在 ii 型神经元模型的框架下, Hopf 分岔可能的同步模式的影响已经研究, 例如 [16-20]。此外, 在皮层兴奋性神经元模型中分析了 PRC 在 Hopf 分岔中的变化 [21]。PRC 行为的质变也直接从 [22,23] 的实验数据中观察到, 其中在 Hopf 和弛豫振荡过渡期间分析了相互作用函数。文献 [24-28,13,29-32] 强调了在通过间隙连接相互作用的弱耦合慢-快系统中存在不同的同步模式和双稳区域。同步也在耦合分段线性模型的背景下进行了研究, 特别是在 [33,34] 中。

慢振荡是复杂动力学的重要来源，特别是与鸭解现象有关 [35,36]。鸭解环是指慢-快系统的一类周期解，该系统在很长一段时间间隔内沿着一个排斥慢流形。鸭解发生在慢-快系统临界流形 (快子系统零曲面) 的附近区域，其中正规双曲的关键假设失效。在具有一个慢变量和一个快变量的系统中，这类点最常见的是一般的折点，即所谓的鸭解点。鸭形解通过靠近鸭形点，从吸引的慢流形流向排斥的慢流形。在平面系统中，鸭解环存在于一个非常窄的分岔参数范围内，这个范围在时间尺度分离参数  $\epsilon$  中呈指数小的间隔；这种通过鸭解机制参数的急剧变化被称为鸭解爆炸 [37]。先进的理论技术，如吹胀方法 [38] 和数值方法 [39] 的结合，引入了对多时间尺度系统 (在  $R^n, n > 3$ ) 中鸭解诱导的复变振荡的新认识，特别是混合模式振荡 (MMOs)[40] 和簇振荡 [41,42]，并将其应用扩展到神经科学 [43-45]。在 (弱) 耦合的慢-快系统中，鸭解的影响在几个方面得到了考虑，如簇的形成、同步、相位和振幅动力学 [46-50]。最近，鸭解介导的多样性在耦合 phantom 簇发放系统中被研究，用于解决同步和不同步问题 [51]。

在这项工作中，我们将先前关于伴随解和弱耦合慢振荡的结果推广到鸭解环的情况。[52] 研究了伴随函数和相互作用函数的解析表达式，并对分岔点附近的行为进行了回顾。在弛豫环的框架下，在 [53] 中，通过采用奇异极限近似，考虑临界流形的吸引分支代替弛豫环的慢段，以及瞬时跳跃代替快速流动，可以得到伴随表达式。使用此步骤的结果是没有处理鸭解机制。在本研究中，我们提出了一种基于数值延拓的数值计算替代策略，用于计算沿鸭解爆炸的平面慢系统相关的伴随变分方程的解。

在参数空间中，鸭解组织了 Hopf 机制和弛豫机制之间的跃迁。因此，我们可以期望通过计算鸭解伴随解来连接这两个族之间的同步行为 [22,23]。在进行这样的计算时，我们观察到在最大鸭解 (具有最长排斥段的环) 附近的伴随 (或等效的 iPRC) 符号和形状发生了质的变化。这种现象发生在两个我们考虑的鸭解爆炸系统中，即 van der Pol(VDP) 振荡器和 Hodgkin-Huxley(HH) 模型的两维 (2D) 简化。我们提出通过鸭解的周期函数来解释这种质变，鸭解在从 Hopf 分岔点到弛豫状态的整个过程中具有非单调行为，即在无头鸭机制状态下鸭解机制的质变增加，在有头鸭机制状态下鸭解机制的质变减少。鸭解爆炸的这一显著特性突出了最大 (周期) 鸭解，我们强调了同步的关键作用，据我们所知，这在以前的研究中没有报道过。[54] 在中心模式发生器的“逃逸-释放”机制中研究了频率对分岔参数的类似依赖。[55] 的作者随后将这种依赖性与低频区域发生的转换和锁相特性联系起来。

在本工作的第二部分，我们探讨了两个弱耦合的相同 VDP 系统之间的相位差对系统参数的依赖。通过研究主要参数对鸭解爆炸的影响，我们观察到耦合系统在最大鸭解处发生的同步特性的转变表现为 AP 同步状态通过相位差中的叉形分岔改变其稳定性。此外，我们揭示了通过多重倍周期分岔在最大鸭解邻域中存在  $2nT$ -周期同步态。最后，考虑了耦合强度对最大条件区振子同步状态的影响。我们给出了 PD 级联存在的数值证据，而不是由弱耦合振荡器理论预测的 (这对于各种系统中的中等耦合强度是有效的 [14,56])，但可以通过仔细检查单通道振荡器的相平面分析来证明。我们还提出了一个计算慢系统伴随极限环的解析公式，得到了令人满意但可改进的结果。

本文组织如下。在第 2 节中，我们介绍了沿极限环计算伴随解所需的主要对象，并提出了沿鸭解环族计算伴随解的数值策略。在第 3 节中，我们数值分析了控制鸭解爆炸的主要参数对耦合 VDP 系统同步状态的影响，并报告了最大鸭解附近发生的质变。然后，我们通过调用与这种鸭解爆炸极限环分支相关的周期函数的性质来解释这种变化。在第 4 节中，我们重点研究了耦合强度参数对最大鸭解附近耦合 VDP 系统同步结构的影响。在总结并提出了这项工作的几个观点之后，我们提出了一个分析公式来计算我们所研究的系统类型的伴随解，并在附录中对该公式进行了数值测试。

## 2 沿着循环族的伴随解的计算

### 2.1 相位响应曲线及其相关内容

PRC 描述了响应于刺激的动力系统沿稳定极限环的移动。弱耦合振子理论 [1,57,4] 用于预测耦合强度“足够小”的耦合振荡系统的锁相特性。该理论将振荡器的动力学降低到一个相位变量，这意味着耦合具有较小的影响，可以随着时间的推移积累并导致锁相行为。IPRCs 对应于无限小刺激极限下的 PRCs。计算 IPRC 的一种方法是利用与所考虑的稳定极限环相关的伴随变分方程的非平凡解；还有许多其他方法，如 [3,5]。

我们现在回顾一下引入与极限环相关的伴随解所必需的主要元素。考虑  $R^n$  中的一个动力系统

$$\frac{dX}{dt} = F(X)$$

它具有一个  $T$  周期渐近稳定极限环  $\gamma$ 。相位变量  $\phi \in [0, T)$  沿着时间参数化的极限环  $\gamma$  来定义，通常归一化为  $1$  或  $2\pi$ 。对于  $x \in \gamma$ ，它可以通过  $\phi = \Theta(x)$  与环上的点联系起来。然后，在响应相  $\phi = \Theta(x)$  (也可以写成  $x = X(\phi)$ ) 的极限环上，对点  $x$  进行少量的  $y \in \mathbb{R}^n$  的扰动，会导致相位的延迟或提前。新相  $\phi'$  由下式给出

$$\phi' = \phi + \nabla_x \Theta(x) \cdot y + O(\|y\|^2)$$

小扰动下的新相位和旧相位的差值表示为

$$\phi' - \phi = \nabla_x \Theta(x) \cdot y.$$

由  $Z(\phi) = \nabla_x \Theta(X(\phi))$  定义的向量函数  $Z$  是描述沿极限环对任何系统变量的无穷小扰动如何改变其相位的相图梯度分量。函数  $Z$  (依赖于  $\phi$  或等价于  $t \in [0, T)$ ) 是伴随变分方程的解

$$\frac{dZ(t)}{dt} + A(t)^T Z(t) = 0$$

满足归一化条件

$$Z(t) \frac{dX_0(t)}{dt} = 1$$

where

$$A(t) = D_X F(X)|_\gamma$$

是系统 (1) 绕极限环  $\gamma$  的线性化。对伴随方程进行逆积分，以消除周期分量外的所有瞬态分量，从而得到解。一种基于后向积分计算伴随积分的算法被嵌入到软件包 XPPAUT 中 [58]，或者可以在 MATLAB 中编码 [59]，此外还有 MaTCont[60] 中基于连续的方法。

鸭解爆炸发生在慢系统中，参数范围很窄，在时间尺度上  $0 < \varepsilon \ll 1$  呈指数级小。自然地，当  $\varepsilon$  趋于 0 时，这个参数范围变得更窄，并且限制了经典工具计算鸭解轨道及其伴随轨道族的使用。这一限制已经被 Govaerts 和 Sautois 承认，他们在延续包 MatCont[60] 中引入了一种直接的数值方法。除了现有的方法外，我们还提出了一种替代的、更简单的基于延续的策略，使用软件包 Auto[61]。我们提出了一个周期连续问题，使我们能够快速可靠地计算出具有伴随积分的非平凡周期解的周期族。请注意，在 [62] 中提出了一种边值问题 (BVP) 方法，该方法在给定系统具有重置的延续设置之外。这里，为了简单起见，我们避免处理边界条件，而选择数值问题最自然的周期设置。在附录中给出了求解慢-快系统中伴随变分方程的解析方法的推广。

## 2.2 伴随问题的数值延拓替代方法

本文提出的数值延拓方法允许我们计算沿鸭解-爆炸分支的极限环及其伴随解。延拓的一个主要优点是有可能找到极限  $\varepsilon \rightarrow 0$  的解。我们扩展了原系统 (1) 的延拓设置，按照顺序求解极限环，通过方程 (2) (写成一阶形式) 寻找伴随问题的周期解。为了计算极限环  $\gamma$  和伴随问题的周期解，需要解以下方程组

$$\begin{aligned} \dot{X} &= F(X), \\ \dot{Z} &= -D_X F(X)|_\gamma^T Z. \end{aligned}$$

我们的数值延拓策略需要两个步骤: 首先，沿着 (初始) 环  $\gamma$  找到伴随问题的非平凡解，其次，在分岔参数中跟踪扩展系统 (4) (作为周期延拓问题) 以找到该解的分支。在下一节中，我们将通过考虑鸭解状态中两个耦合的慢-快系统的例子来描述这些步骤，即 VDP 系统和用于动作电位产生的 HH 模型的二维简化，其慢-快结构和相关的鸭解动力学在 [63] 中进行了分析。

### 2.2.1 VDP 系统的伴随解

在 VDP 系统中，扩展延续设置 (4) 得到

$$\begin{aligned} x' &= y - f(x) \\ y' &= \varepsilon(c - x) \\ z_1' &= f'(\gamma_1(t)) z_1 + \varepsilon z_2 \\ z_2' &= -z_1, \end{aligned}$$

$f(x) = x^3/3 - x, 0 < \varepsilon \ll 1$  和  $c$  是显示鸭解爆炸的分岔参数。(5) 中给出的系统将原 VDP 系统与伴随方程合并。如上所述，延续程序分为两个步骤。在第一步中，我们用前两个方程的极限环  $\gamma$  初始化系统 (5) 和其余两个方程的平凡解 (它是平凡周期的)。我们需要得到伴随方程的一个非平凡周期解，它可以通过一个额外参数中的连续系统 (5) 来找到。实际上，假设伴随方程的平凡解存在于参数值  $c$  和  $\varepsilon$  的所有值，通过继续在其中任何一个值，我们只能希望找到一个分支点并在这个分岔处切换到非平凡解分支。另一种方法是引入一个虚拟参数  $\mu$ ，使系统 (5) 变成

$$\begin{aligned} x' &= y - f(x) \\ y' &= \varepsilon(c - x) \\ z_1' &= f'(\gamma_1(t)) z_1 + \varepsilon z_2 \\ z_2' &= -z_1 + \mu, \end{aligned}$$

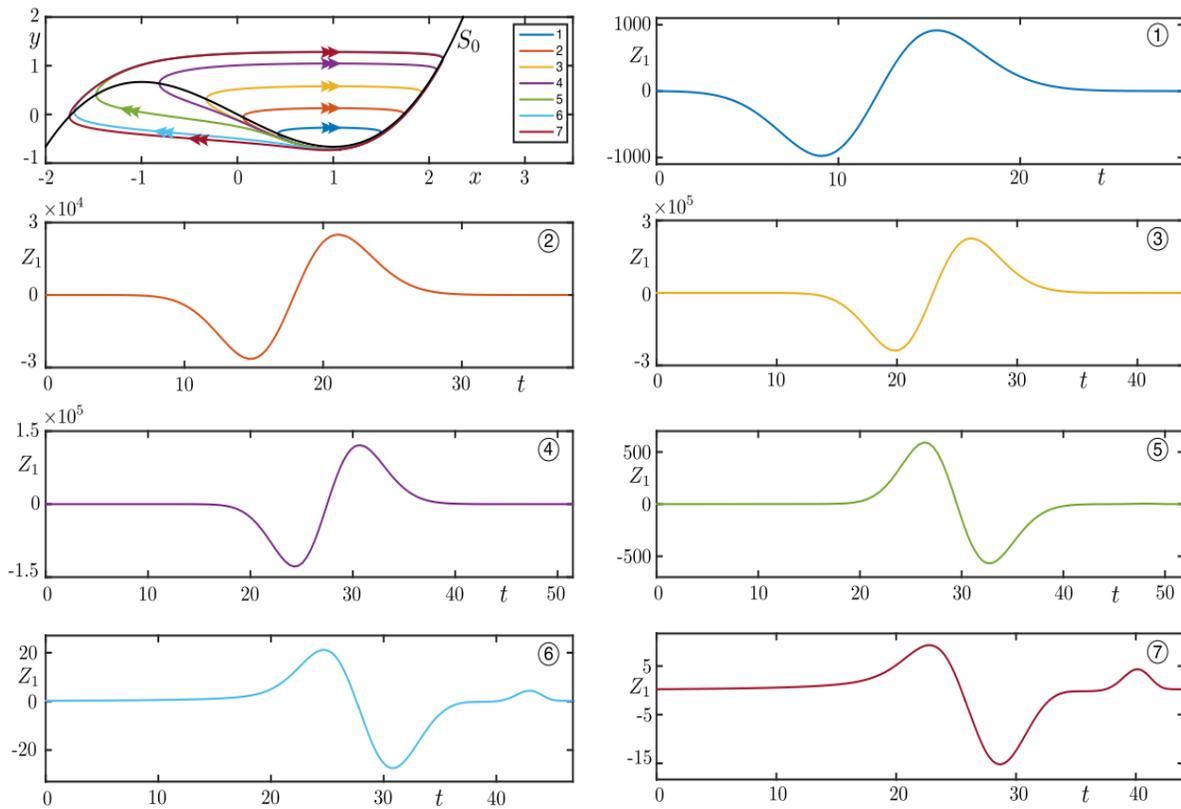


Figure 1: 左上图: 当  $\varepsilon = 0.1$  时，VDP 系统在相位平面上的鸭解轨道。画板 1-7: 与相平面中显示的每个鸭解周期相关的伴随解的第一个分量的时间剖面 (连同临界流形  $S_0 := y = f(x)$ )，保持相同的颜色编码。伴随解的质变发生在轨道 4 和轨道 5 之间，对应于通过最大鸭解环。(读者可参阅本文的网页版本，以了解本图例中有关颜色的解释。)

然后沿着一个非常小的间隔继续以  $\mu$  为单位的初始解, 越小越好。结果表明, 我们可以在  $\mu$  中计算分支, 并在  $\mu = 10^{-8}$  处停止, 这确实很小, 但足以找到扩展问题 (6) 的非平凡解。

鉴于  $\mu$  很小, 我们可以, 在第二步中, 施加  $\mu = 0$  和运行一个简单的牛顿迭代, 使得收敛到原扩展问题 (5) 的非平凡解。利用数值延拓计算沿鸭解环伴随方程的非平凡解的优点是我们可以沿着鸭解环在参数  $c$  上延续扩展问题 (5), 还有关联到整个鸭解爆炸的伴随方程的相关周期解。

最后, 需要归一化条件 (3) 来逼近伴随方程对应的线性问题。将此条件作为我们的数值延拓过程的一部分的实现对于小的  $\epsilon$  值可能有点微妙, 因此我们决定在 Auto 中使用周期延拓, 并应用对应于 (3) 的缩放作为后-处理步骤。注意, 我们不计算 Floquet 来获得伴随方程对于这个数值问题的非平凡解, 因为我们只需要伴随方程的任何非平凡解, 然后我们可以适当地规范化。

从 Hopf 分岔开始, 一直到松弛豫状态, 我们可以通过改变  $c$  和它们的伴随解来追踪鸭解环。图 1 显示了无头鸭和有头鸭中的一些轨道。我们观察到伴随解发生了质的变化, 当极限环  $\gamma$  通过最大鸭解时, 周期轨道上的  $\max(x(t))$  点对应于零相  $\phi = 0$ 。

为了了解我们观察到的耦合 VDP 振荡器的跃迁是否与系统相关, 我们接下来在简化 HH 模型的平面中计算与鸭解相关的伴随解。

### 2.2.2 在简化 Hodgkin-Huxley 模型中鸭解环的伴随

从 [63] 鸭解动力学的角度分析将经典 HH 模型简化为两个变量; 平面系统有以下形式

$$\begin{aligned} C\dot{V} &= I - \bar{g}_{Na} [m_\infty(V)]^3 (0.8 - n) (V - V_{Na}) \\ &\quad - \bar{g}_K n^4 (V - V_K) - g_L (V - V_L) \\ \dot{n} &= \alpha_n(V)(1 - n) - \beta_n(V)n, \end{aligned}$$

这里  $\alpha_n(V) = (0.01(V + 55))/(1 - \exp[-(V + 55)/10])$ ,  $\beta_n(V) = 0.125 \exp[-(V + 65)/80]$ ,  $m_\infty(V) = \alpha_m/(\alpha_m + \beta_m)$  其中  $\alpha_m = (0.1(V + 40))/(1 - \exp[-(V + 40)/10])$ ,  $\beta_m = 0.4 \exp[-(V + 65)/18]$ 。Moehlis 在 [63] 中说明, 当参数  $I$  发生变化时, 系统 (7) 有以下参数的固定值:  $\bar{g}_{Na} = 120$ ,  $\bar{g}_K = 36$ ,  $\bar{g}_L = 0.3$ ,  $V_{Na} = 50$ ,  $V_K = -77$ ,  $V_L = -54.4$ ,  $C = 1$ 。

在数值验证了  $V$  的动力学比  $n$  的动力学快得多, 系统有效地显示了慢-快动力学之后, 对  $\epsilon$  进行了渐近分析, 并以慢方程 ( $\dot{n} = \epsilon(\alpha_n(V)(1 - n) - \beta_n(V)n)$ ) 的尺度改变形式出现在 [63] 中。在渐近分析中, 将  $\epsilon$  作为一个小参数处理, 得到鸭解爆炸发生时的  $I$  值的  $\epsilon$  展开式, 并将  $\epsilon = 1$  代入最终公式。

尽管在系统 (7) 中部分鸭解分支不稳定, 但延拓策略允许找到伴随方程的解。由于我们感兴趣的是位于排斥慢流形的不同面的鸭解环伴随方程的形状, 因此我们可以忽略稳定性问题。按照上面描述的相同的连续计算过程, 我们计算了 2 维简化 HH 系统的伴随方程。鸭解环和相应的伴随方程如图 2 所示。与 VDP 系统一样, 从无头鸭到有头鸭的转变定性地改变了伴随解。

### 2.3 非单调周期函数对 iPRC 的影响

如图 3 所示, 沿鸭解爆炸的周期函数是非单调的。它在无头鸭机制处增加, 在最大鸭解处达到最大值, 然后在有头鸭机制中减小。周期函数沿鸭解爆炸分支的非单调性是 VDP 型系统鸭解现象的一个关键方面, 周期函数的最大值可用于数值检测最大鸭解 [64]。这个周期函数的形状足以理解鸭解环在足够接近临界流形  $S_0$  的下折点处的扰动所产生的影响。实际上, 在离这个折点  $O(1)$  处, 来自慢流形的一个足够小的扰动会使扰动轨迹非常迅速地回到它那里, 因此这种扰动的影响在很大程度上被减弱。这证明沿鸭解环的伴随方程的解在大多数环中都接近于零, 除了周期接近下折点时对应的的时间区间 (鸭解点所在的地方)。另一方面, 在临界流形的下折面附近, 与所选鸭解环相关的慢流形的吸引力较弱, 摄动的影响变得很大; 见图 4(a2), (b2) 对这一点的说明。这种效果可以通过调用鸭解环分支的周期函数来理解。

首先, 考虑如图 3(b) 所示的无头鸭环。如果我们用  $T_{red}$  表示红色环的周期, 那么小的鸭解周期, 比如蓝色的周期, 比红色的周期更小, 而大的无头鸭周期, 比如黄色的, 周期更大。因此我们有:  $T_{blue} < T_{red} < T_{yellow}$ 。因此, 在折点附近的

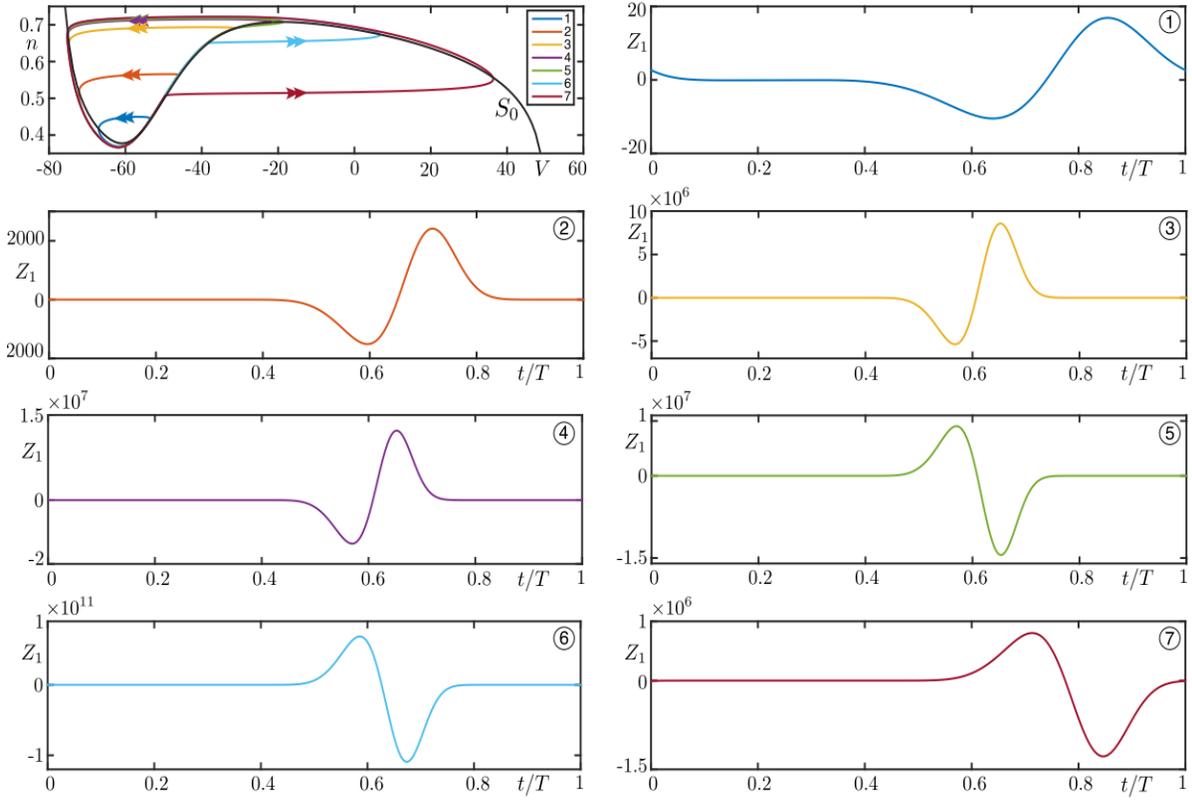


Figure 2: 左上图: 相平面上简化 HH 系统的鸭解轨道。画板 1-7: 相平面中与鸭解环相关的伴随解的第一个分量的时间剖面 (连同临界流形  $S_0 := \dot{V} = 0$ ), 保持相同的颜色编码。伴随解的质变发生在轨道 4 和轨道 5 之间, 对应于通过最大鸭解环。(对于图例中有关颜色的解释, 请参阅本文的网页版本。)

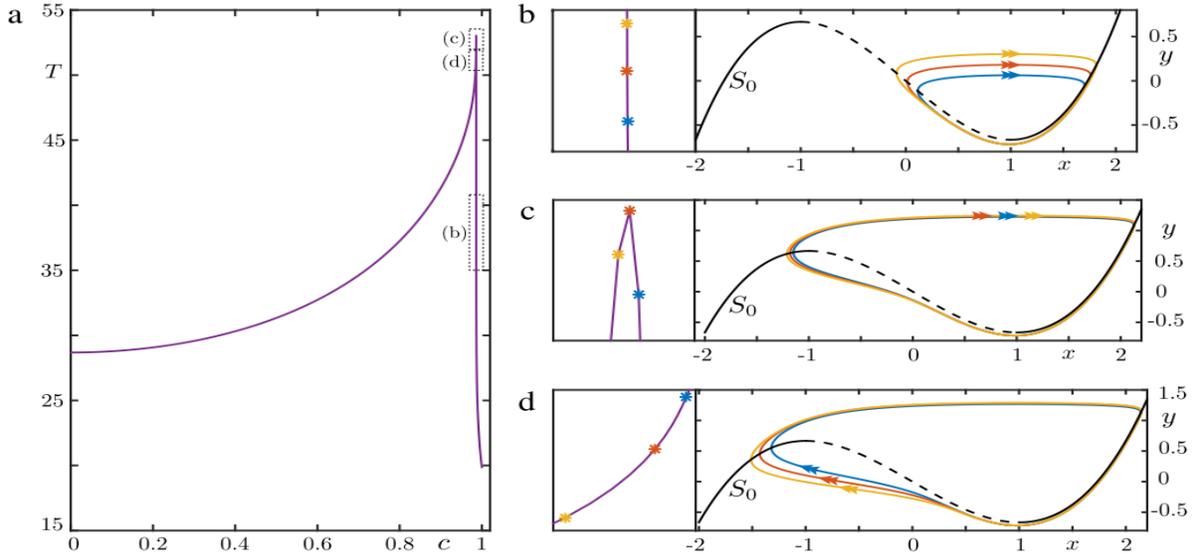


Figure 3: (a)  $\epsilon = 0.1$  时, VDP 系统沿鸭解爆炸极限环的周期; 变化的参数为  $c$ 。周期沿分支的无头鸭增加, 在最大鸭达到最大值, 然后沿有头鸭减小。(b) 周期曲线上标记的三个无头鸭式环及其周期。较小的环有较小的周期。(c) 在最大鸭解附近的三个环, 以及在周期曲线上标记的周期。有头鸭和无头鸭在这附近有非常接近的时期。(d) 三个有头鸭, 在周期曲线上标出它们的周期。较大的环有较小的周期。面板 (b) 至 (d) 上还显示了临界流形  $S_0$ , 实线 (虚线) 部分表示稳定 (不稳定) 的分支。(对于图例中有关颜色的解释, 请参阅本文的网页版本。)

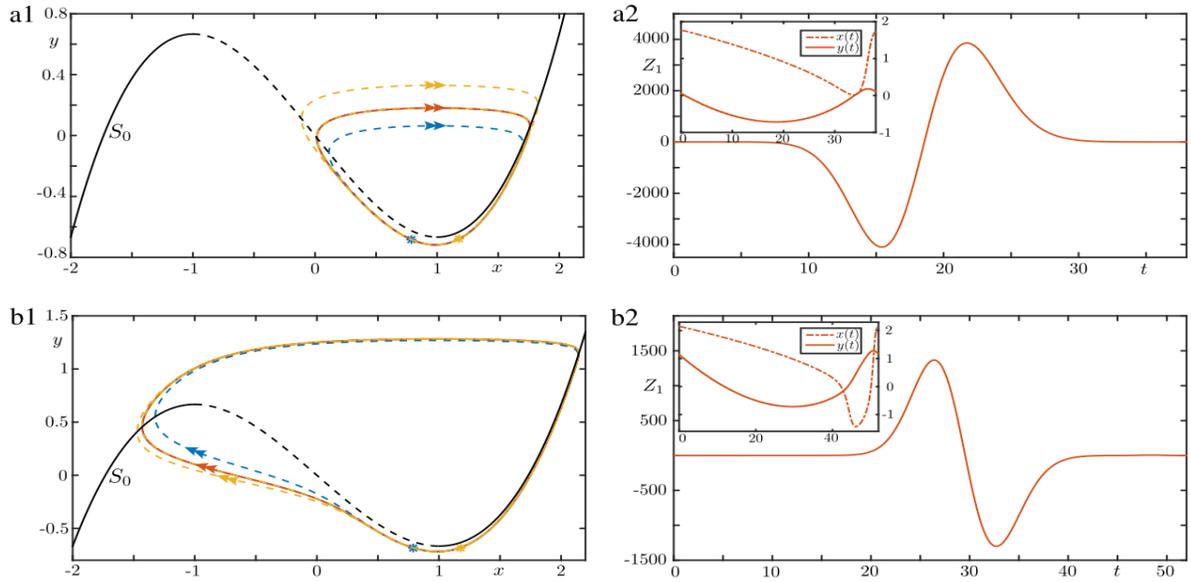


Figure 4:  $(a_1, b_1)$  正  $x$ -方向鸭解环 (红色实线) 的小扰动的瞬态效应 (虚线)。(a2)-(b2) 是一个周期内伴随解的第一个分量  $(x(t), y(t))$  的时间剖面。扰动无头鸭 (有头鸭) 远离吸引慢流形 (黄色星号) 延迟 (响应), 通过推动它进入一个更大但更慢的阶段的黄色虚线环。扰动无头鸭朝向排斥慢流形 (蓝色星号) 前进 (通过将其驱动到更小但更快的 (响应) 蓝色虚线环来延迟。(对于图例中有关颜色的解释, 请参阅本文的网页版本。)

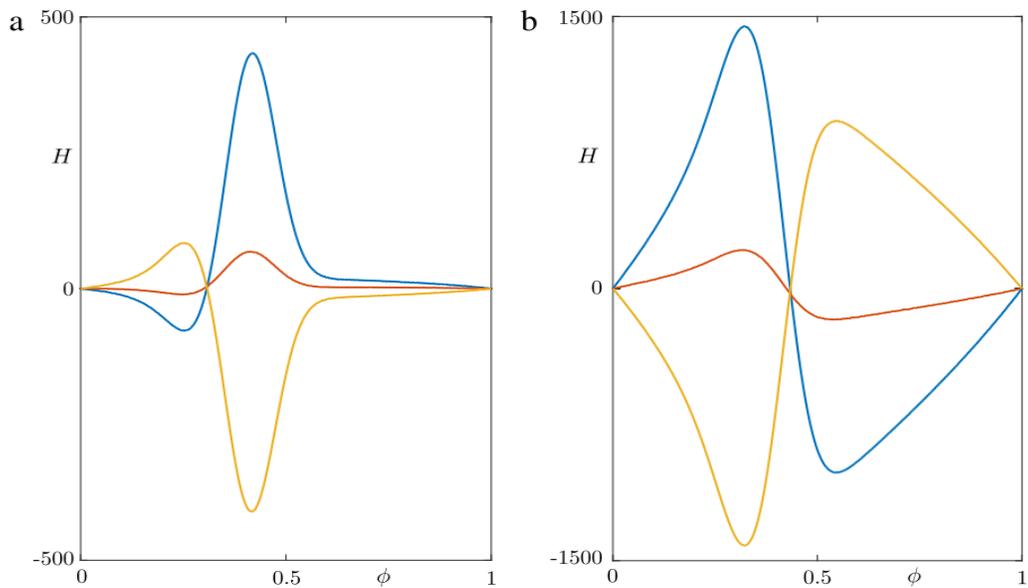


Figure 5: 图 3(c) 给出了 FF(图例 (a)) 和 FS(图例 (b)) 耦合函数在最大鸭解邻域中的作用函数  $H$ 。 $H$  的性质反映了伴随方程解的结果, 跃迁发生在最大鸭解的邻域中。

红色无头鸭环的缓慢吸引部分 (图 4(a1) 中的黄色点) 施加正  $x$  方向的无限小扰动, 会使扰动轨迹在收敛回红色环之前短暂地跟随一个更大的无头鸭环 (如黄色的)。考虑到黄色环有一个更大的周期, 与未受扰动的轨道相比, 受扰动的轨道的相位延迟了。在红色无头鸭环的慢排斥侧 (图 4(a1) 中的蓝点) 施加这样的扰动会产生相反的效果, 因为在这种情况下, 受扰动的轨迹首先跟随较小的鸭解, 因此与未受扰动的轨迹相比, 具有更先进的阶段。因此, 这一定性论证证明了图中所示无头鸭解环伴随解的符号是正确的。从图 4(a2) 中的  $(x(t), y(t))$  流可以观察到, 伴随  $Z_1(t)$  的第一个分量的负部分表示相位延迟, 对应于流向折点的流动。 $Z_1(t)$  的符号在折点处 ( $x = 1$ ) 发生变化, 然后随着  $(x(t), y(t))$  沿着排斥分支继续,  $Z_1(t)$  的符号变为正的。带头鸭的情况则完全相反: 周期函数沿带头鸭递减, 因此有 3 个带头鸭在图 3(d) (蓝色、红色和黄色) 中, 他们的周期满足不等式  $T_{blue} > T_{red} > T_{yellow}$ 。因此, 一个类似于上面给出的相平面论证证明, 一个无限小的鸭解在其缓慢吸引段附近的折点导致摄动轨迹的相位推进, 而在缓慢排斥段导致相位延迟。这与图 4(b2) 中绘制的沿有头鸭计算的伴随解一致。解  $(x(t), y(t))$  使得图 4(b2) 证实了  $Z_1(t)$  沿着流向折点的流取正值, 在折点处改变其符号 ( $x = 1$ ), 然后随着解  $(x(t), y(t))$  远离折点区域而变为负值。请注意, 调用周期函数来解释伴随解的形状和符号的变化已在 [55] 中用于所谓的半中心振荡器同步的逃逸-释放机制。这里我们证明了它也适用于耦合鸭解振荡器的情况。

### 3 弱耦合鸭解振荡器的同步性质

伴随解的行为 (或等价地, iPRCs 的行为) 通过伴随解的相互作用函数和耦合函数 [57,7,8,5,4] 的卷积, 来预测弱耦合状态下的集体行为。在耦合相同的系统中, 每个振荡器的相互作用函数如下:

$$H(\phi_j - \phi_i) = \frac{1}{T} \int_0^T Z(t) U_j(\gamma(t), \gamma(t + \phi_j - \phi_i)) dt$$

其中,  $\phi_j - \phi_i (i = \{1, 2\}, j = 3 - i)$  为两个振荡器之间的相位差,  $U$  为耦合函数。相位差的动力学,  $\phi = \phi_j - \phi_i$ , 用以下方程来描述

$$\frac{d\phi}{dt} = \alpha[H(-\phi) - H(\phi)] = \alpha G(\phi)$$

其中,  $1 \gg \alpha > 0$  为耦合强度。如果  $G'(\phi^*) < 0$ , 方程 (9) 在  $\phi^*$  处有一个稳定的解, 这意味着两个振荡器将以相位差  $\phi^*$  达到同步。解  $\phi^* = 0$  对应于 IP 同步,  $\phi^* = \pi$  (如果相位重新调整为  $[0, 1]$ , 则等价于  $\phi^* = 0.5$ ) 到 AP 同步,  $\phi^*$  的任何其他值对应于耦合振荡器的 OP 同步。在耦合相同振荡器的情况下, IP 和 AP 解都保证存在 [65]。

两个相同的弛豫环 (来自具有立方型快零斜线的振子) 通过快到快 (FF) 连接弱耦合的 IP 同步已在 [66,29,53,30,67,27] 中得到证实。除了 FF 耦合——这是一种通常被认为的耦合函数, 因为它是神经元系统项之间相互作用的原型——我们还考虑了快到慢 (FS) 耦合, 这在生物学上是不现实的, 但为理解扰动和鸭解之间的相互作用提供了见解。FF 耦合 VDP 振荡器为:

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x}_i &= y_i + x_i - \frac{x_i^3}{3} + \alpha(x_j - x_i), \\ \dot{y}_i &= (c - x_i), \end{aligned}$$

而 FS 耦合系统为

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x}_i &= y_i + x_i - \frac{x_i^3}{3}, \\ \dot{y}_i &= c - x_i + \alpha(x_i - x_j). \end{aligned}$$

小扰动对临界流形下折点附近的鸭解的影响, 对于有头鸭与无头鸭是不同的, 由相应的伴随解揭示; 见图 1。这种质变发生在最大鸭解处。图 5 显示了通过 FF (图 (a)) 和 FS (图 (b)) 连接与最大鸭解 (图 3(c)) 附近的环相关的作用函数  $H$ 。假设无头鸭环更类似于最大鸭环 (最大鸭环是最大无头鸭环), 函数  $H$  的振幅减小, 而  $H(\phi^*) = 0$  的解和  $H'(\phi^*)$  的符号保持不变。当环移动到有头鸭机制时,  $H'(\phi^*)$  的符号改变, 而  $\phi^*$  的 0 的个数保持不变。

对于通过 FF 耦合作用的环 (其连接点如图 1 所示), 计算函数  $G$  (见图 6)。  $G$  的零点  $\phi^*$  的位置及其导数在这些点上的符号决定了耦合系统同步状态的类型和稳定性。对于 Hopf 环存在的 IP 同步解 (在此图中未显示) 在鸭解爆炸时失去稳定性 (由于对临界流形  $S^0$  折点附近通道产生的扰动的高灵敏度), 而对于无头鸭解环 (轨道 1-4) 出现三维稳定的 OP 解。稳定 OP 解的相位差随着周期接近最大值而增加 (图 1-4)。有头鸭 (轨道 5-7) 出现双稳性, 其中 IP 和 AP 解为稳定同步解, OP 为不稳定解 (图 5-7)。

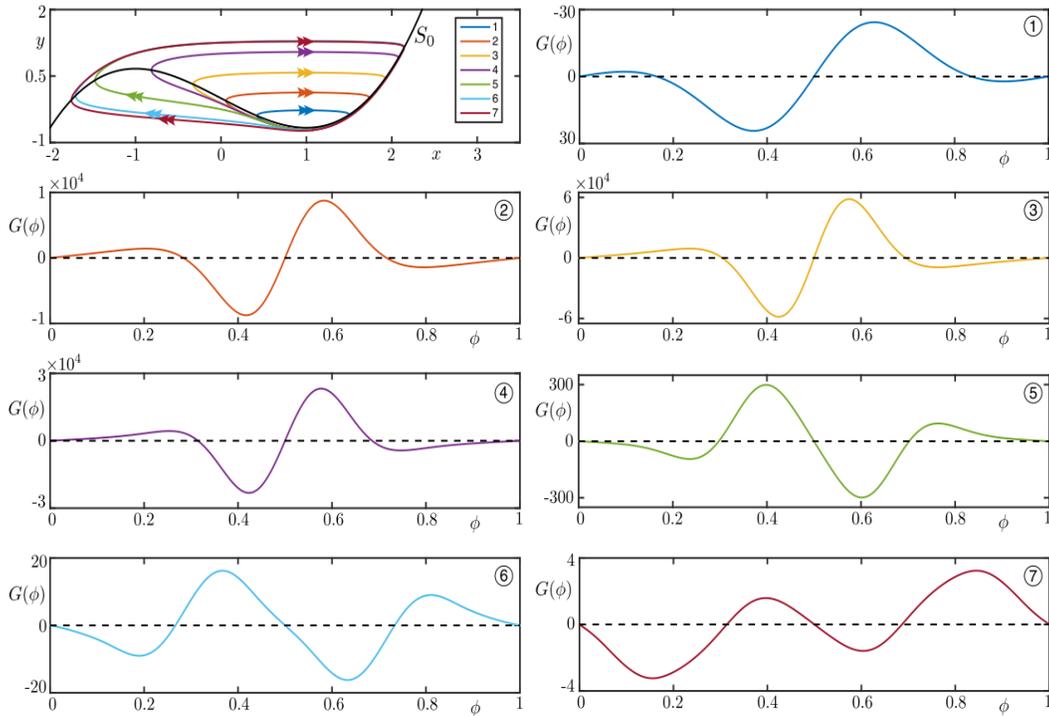


Figure 6: VDP 振荡器在相平面  $(x, y)$  (左上) 的鸭解环以及相应的  $G$  函数 (图 1-7; 相位  $\phi$  被重新缩放到  $[0,1]$ )。

利用函数  $G$  得到的具有 FF 耦合的弱耦合 VDP 系统的同步化状态信息, 可以通过对耦合系统的数值分岔分析得到。我们通过在参数  $c$  中延续系统 (10) 的同步状态 (包括图 6 中未显示的状态) 来执行此分析。结果在图 7 中展示, 其中, 所选的解的度量是每个振荡器在时间  $t = 0$ ,  $x_2(0) - x_1(0)$  时的  $x$  分量之间的差值, 忽视其作为  $c$  的函数的振幅的变化。这个方法与简单轨道的相位差具有相同的解释, 并且它经常用于弱耦合振子的分析 [2]。图 (b) 至图 (d) 是图 (a) 在区域内的连续缩放, 对应于每个振荡的最大鸭解。从双 Hopf 分岔点  $c = c_{Hopf} = 1$  到  $c \approx 0.615$  附近的弛豫机制, 追踪了 FF 耦合环的同步态的性质。我们考虑一个固定的耦合强度  $\alpha = 10^{-5}$ , 弱耦合振荡理论预计是有效的; 关于  $\alpha$  的作用的详细讨论将在第 4 节中提出。在  $c = c_{Hopf}$  处出现一个稳定分支和两个 (对称) 不稳定分支, 分别对应于 IP 和 AP 解。IP 解经历了叉型分岔, 当稳定的 OP 解出现时, 它失去了稳定性 (图 (b))。OP 分支在 PD 分岔处变得不稳定, 随后是关联  $2nT$ -周期稳定同步解的 PD 级联 (图 (d)), 其中相互作用函数分析无效。  $T$ -周期 OP 分支通过第二次 PD 分岔再次变得稳定。在连接到重新稳定 IP 状态的 IP 分支上的第二个叉型分岔点之前, 它通过几个折分岔两次改变其稳定性。

在  $c_{Hopf}$  处出现的不稳定 AP 分支通过叉型分岔在耦合系统的最大鸭解处变得稳定 (图 (c))。与此叉型分岔相关的稳定 AP 解和 OP 解与最大鸭解邻域范围内的稳定 IP 解共存。当  $c$  值较小时, IP 和 AP 状态保持稳定, OP 状态不稳定。

通过延拓分析, 已经通过函数  $G$  的研究揭示了双稳定区域 (如图 8 所示), 特别是在最大鸭解附近产生的稳定 IP 和稳定 AP 状态 (有头鸭和弛豫环) 共存。这种复杂的分岔结构揭示了稳定 IP 和 AP 状态之间的主要联系, 通过  $c = c_{Hopf}$  的双 Hopf 点, 从而产生 IP 稳定状态和不稳定 AP 状态的分支。进一步降低  $c$ , 会出现额外的分岔, 特别是叉型分岔点 (图 7(a) 至 (c) 中的黑点), 它们对应于同步状态失去某些对称性的事件。实际上, 在 IP 和 AP 分支上, 这些分岔导致了两个鸭解振荡不遵循的周期; 在每种情况下, 同步状态通过折分岔再次变得相同。请注意, 这些来自 IP 和 AP 状态的不相同分支彼此靠近 (靠近第二对折分岔), 形成一个似乎是破裂的跨临界分岔结构。这种扰动分岔在这里只是推测; 更详细

地分析同步状态的  $\epsilon$ -依赖性超出了本文的范围, 这将是未来工作的一个问题。我们只是注意到, 这种结构似乎扰乱了稳定 IP 和稳定 AP 耦合鸭解之间的附加连接。最后, 我们注意到存在几个 PD 分岔序列 (图 7(d) 中的彩色点), 这些序列可能表示该参数空间区域中的混沌动力学的小区域。

上面描述的分岔图中一个引人注目的元素是, IP 和 AP 同步状态之间的大多数连接分支都在与最大鸭解对应的解附近。因此, 很自然地要问耦合强度  $\alpha$  对包含最大鸭解段的同步状态的影响; 我们将在下一节中重点讨论这方面。

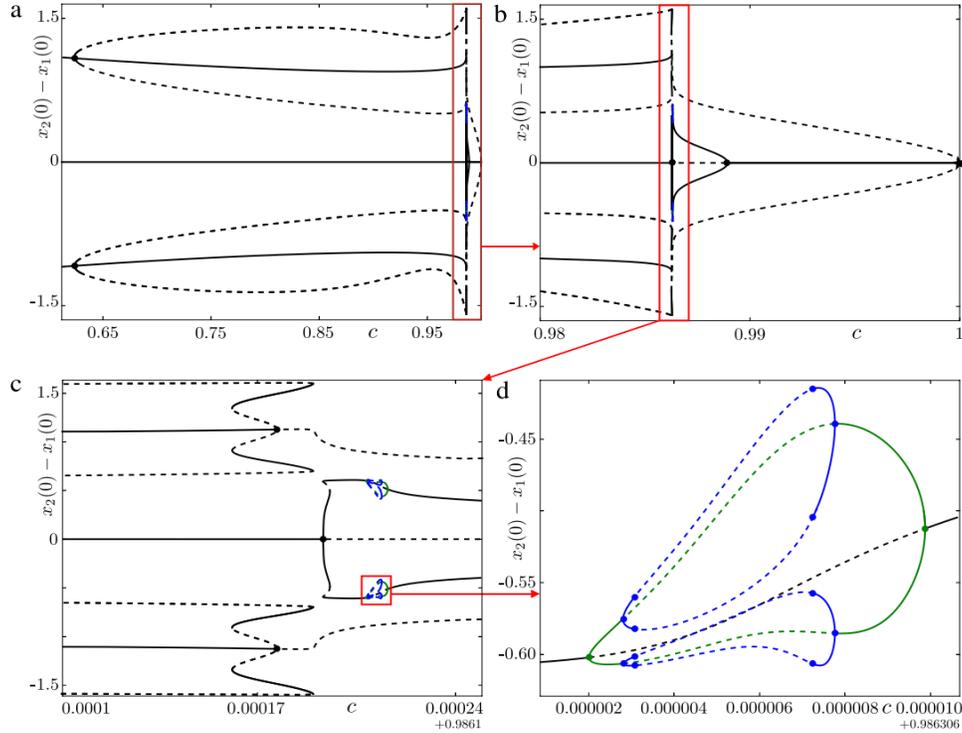


Figure 7: 当  $\alpha = 10^{-5}$  时, 系统 (10) 随  $c$  变化的分岔图, 从 Hopf 区到弛豫区。输出解测量是每个振荡器在时间  $t = 0$  时的第一个分量之间的差。最大鸭解的区域从左到右, 从上到下扩大。图 (a) 至 (c) 中的黑点表示叉型分岔点; 图 (b) 中的黑色星点对应于该耦合系统中的双 Hopf 点; 图 (d) 中的彩色点表示 PD 分岔点。(对于图例中有关颜色的解释, 请参阅本文的网络版本。)

FF-耦合 VDP 系统在最大鸭解附近的  $\alpha$  的延拓。面板 (a) 和 (b) 是主面板不同部分的缩放视图。分岔点 (主要是 PD 分岔) 用红点表示。T-周期 (黑色), 2T 周期 (绿色) 和 4T-周期 (蓝色) 分支与稳定 (实心) 和不稳定 (虚线) 解共存。(对于图例中对颜色的解释, 请参阅本文的网络版本。)

## 4 耦合强度 $\alpha$ 的影响

相互作用函数分析揭示了弱耦合振子同步态的存在性和稳定性, 这种耦合应该有多“弱”才能使理论适用是值得怀疑的。例如, 文献 [14] 表明, 对于泄漏积分-放电型振荡器, H-函数分析对中等耦合强度有效, 而其他论文 (参见 [68,69]) 提到了通过相互作用函数分析估计的 1:1 锁相损失。在耦合鸭解爆炸系统中, 底层振子的性质在时间尺度参数  $\epsilon$  呈指数级小的参数范围内剧烈变化, 弱耦合的概念可能更加模糊。例如, 图 7(d) 中突出显示的 PD 分岔的级联区域, 对应于接近最大鸭解结构的周期 (在强度为  $\alpha = 10^{-5}$  的弱耦合下), 提供了很好的数值证据, 表明鸭解轨道对扰动非常敏感, 在这种情况下, 相互作用函数分析的有效性是有限的。

为了进一步研究这方面, 我们接下来考虑两个耦合的相同无头鸭环的相位差动力学, 其  $c$  值在最大鸭解附近, 作为耦合强度  $\alpha > 0$  的函数, 这个数值延续研究将关注 FF 和 FS 的相互作用。目的是确定扰动强度的哪个范围可以产生有趣的鸭解介导的动力学, 这种动力学不是由相互作用函数分析预测的, 但它的存在可以用慢-快论证来证明。

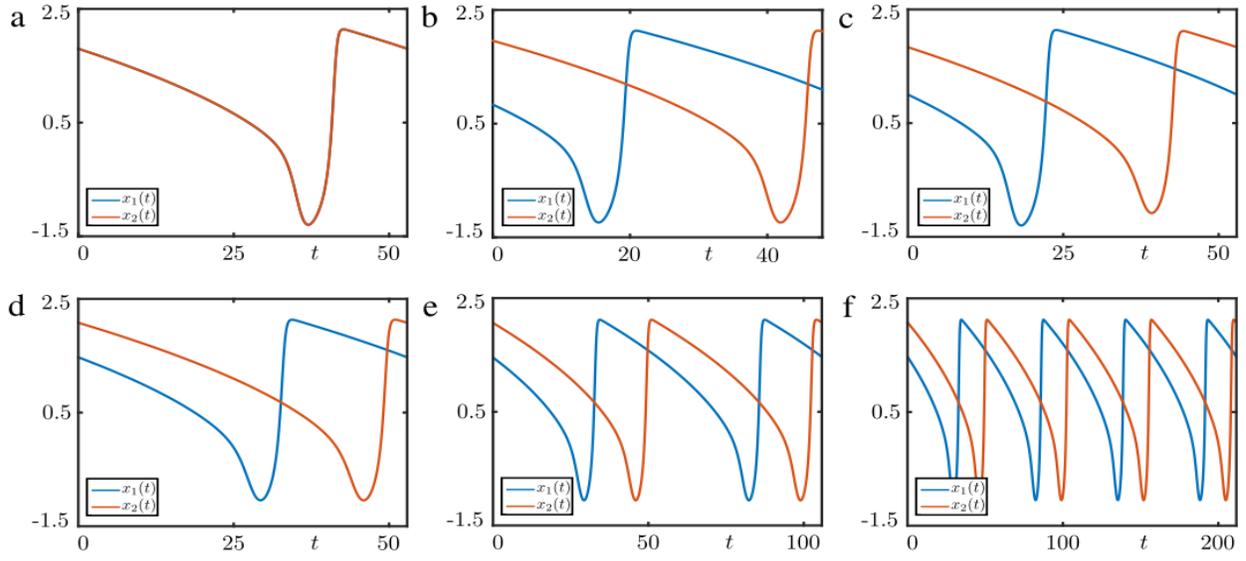


Figure 8: 图 7(c) 中  $c = 0.986267$  时共存稳定 IP (a)、AP (b)、OP (c) 的解。  $c = 0.98631587277$  (d) 的稳定 2T-周期解,  $c = 0.9863137635$  (e) 的 2T-周期解,  $c = 0.98631334783$  (f) 的 4T-周期解, 见图 7(d)。

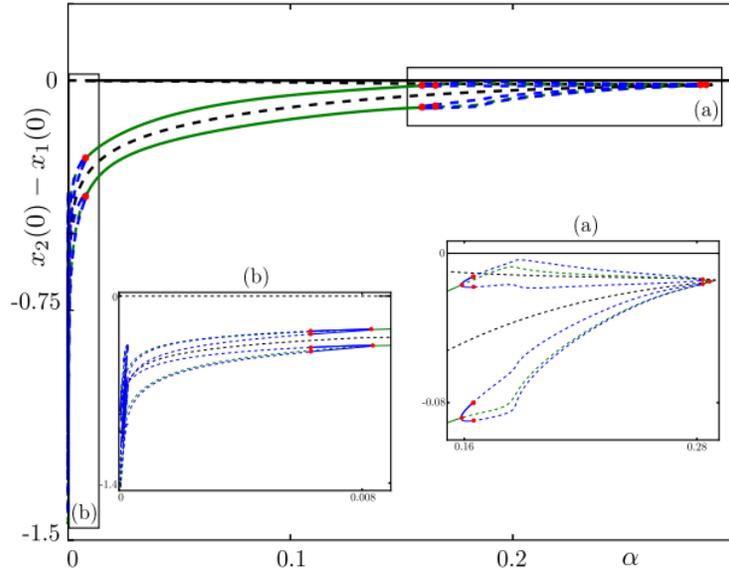


Figure 9: 图 7(c) 中  $c = 0.986267$  时共存稳定 IP (a)、AP (b)、OP (c) 的解。  $c = 0.98631587277$  (d) 的稳定 2T-周期解,  $c = 0.9863137635$  (e) 的 2T-周期解,  $c = 0.98631334783$  (f) 的 4T-周期解, 见图 7(d)。

快对快 (FF) 耦合。图 9 和图 10 显示了这种情况下  $\alpha$  的分岔结构 (放大视图); 相关解的概要如图 11 和图 12 所示。通过相互作用函数分析, 对具有 FF 耦合的两个无头鸭环, 即系统 (10), 预测了相位差  $\phi^* = 0.34$  的稳定 OP 同步状态; 见图 5(a) 和图 5(a)。利用图 9 所示的分岔图, 我们可以得出结论, 当  $\alpha \in (0, 6.63371 \times 10^{-5})$  时, 这种 OP 状态仍然存在。它在  $\alpha \approx 6.63371 \times 10^{-5}$  处通过 PD 分岔失去了稳定性, 相互作用函数结果被破坏, 因此, 对于更大的耦合强度无效。这个 PD 点的切换分支显示了 PD 级联的存在, 我们只计算了后续几个分支。在这些  $2nT$  周期同步解分支的稳定部分中 (在其附近也肯定存在混沌轨道), 即对于耦合强度  $\alpha \in (6.63371 \times 10^{-5}, 0.0083195]$ , 存在一类解, 我们称之为“峰值抑制”。这种情况对应于当其中一个振荡器通过有头鸭而另一个振荡器始终保持在无头鸭状态时的峰值。对于 IP 解分支, 它在  $\alpha \approx 0.0085633416545$  处变得稳定, 并且对于  $\alpha \in [0.0085633416545, 0.289498]$ , 与  $2nT$ -周期无头鸭分支共存。

快-慢 (FS) 耦合。这种情况下的  $\alpha$  分岔结构如图 13 所示; 相关的解如图 14 所示。由 FS 耦合的相互作用函数分析预测的稳定 IP 同步状态 (图 5(b)) 在  $\alpha \approx 0.007498445$  (图 13(a)) 处变得不稳定, 通过亚临界 PD 分岔引入不稳定的  $2T$ -周期分支, 该分支在  $\alpha \approx 8.74785268 \times 10^{-5}$  处变得稳定, 此时作用函数的分析失去有效性。继续这个分支会导致检测到进一步的 PD 分岔, 这些分岔组织在级联中, 我们只计算级联的开始; 见图 13 (b)。这些  $nT$ -周期分支对应于我们称之为“峰交替”的解族, 即 FS 耦合系统的两个振荡器随后跟随无头鸭解, 然后跟随有头鸭解, 因此展现了一个 MMO [40]; 如图 14 所示, 分别在 (a)、(b) 和 (c) 图上显示周期为  $T$ ,  $2T$  和  $4T$  的 MMO 环。根据耦合强度  $\alpha$  的值, 振子可以遵循相同或不同的鸭解轨迹。

在 FF-耦合和 FS-耦合的鸭解系统中, 我们用数值分岔分析的方法观察到沿无头鸭解和沿有头鸭解的若干具有复杂振荡模式的稳定解分支的邻近性。在神经元系统的背景下, 这些解交替阈下振荡和峰。弱耦合振荡器研究中通常采用的作用函数分析方法无法预测这些解。然而, 人们可以通过在这种排斥 (Fenichel) 慢流形系统中的存在来证明它们的存在, 已知这些流形是指数接近的 (在时间尺度分离参数  $\epsilon$  中)。因此, 这些流形在每个慢振荡器的临界流形  $S_0$  的中间分支附近的存在可以解释为什么对于耦合强度  $\alpha$  值大于指数小的情况下, 耦合系统的同步状态可能会在非常接近边界的情况下跟随这些流形在一侧 (亚阈值机制) 或另一侧 (峰发放机制)。换句话说, 当两个相同的慢-快系统弱耦合时, 非耦合系统中存在一个相互排斥的慢流形和一个相关的最大鸭解轨迹, 可以产生全 (耦合) 系统的解, 其中每个结点在相反的两侧遵循该最大鸭解, 因此在  $O(1)$  时间后分离。只要耦合强度大于  $\epsilon$  的指数小函数, 这种情况就会发生, 因此可以解释耦合系统中鸭解诱导状态的存在; 参见 [51] 中弱耦合折奇异系统中这种现象的例子。

## 5 讨论

在本文中, 我们从理论和数值的角度, 将先前关于弱耦合慢振荡的结果扩展到鸭解。我们的主要发现是, 当考虑的鸭解环沿着相关的爆炸分支移动 (随着鸭解参数的变化) 时, 伴随解 (或等效的 iPRCs) 的行为发生了质的变化。事实上, 伴随解的符号和形状随着鸭解环从无头鸭解状态转变为有头鸭解状态而变化, 这种转变发生在最大鸭解环处, 这揭示了之前未被注意到的这种特殊鸭解在耦合慢振荡中所起的作用, 这与它对应于周期函数 [64] 的临界点这一事实密切相关。这种鸭解环伴随在无穷小扰动下的行为变化可以用已知的鸭解爆炸分支周期函数的特殊性质来解释, 可以总结如下: 较大的无头鸭周期较大, 而较大的有头鸭周期较小。正如在第 3 节中所解释的, 当扰动被应用于与鸭解点相对应的临界流形的折点附近时, 这个论点是完全适用的, 当扰动应用于远离这个折点的地方时, 它的有效性被削弱了, 在那里, 向无扰动环的收缩迅速湮灭了扰动的影响。这证明了沿鸭解环计算的伴随方程在大部分环期间非常接近于零, 除了鸭解环经过临界流形  $S_0$  的折 (鸭解) 点附近的时间区间。然而, 我们提供的解释对于伴随解的大部分信息是有效的, 并且对耦合鸭解系统的同步解有影响。

我们已经在典型鸭解振荡器 (即 VDP 系统) 中展示了这种机制, 但它显然适用于这种形式的易激系统, 特别是慢-快神经元模型, 如 [63] 中研究的简化 HH 模型。这为重新理解这种神经元模型中的 iPRCs 开辟了道路, 从 Hopf 环 (其伴随解定性地看起来像与小无头鸭环相关的那些) 到尖峰环 (其伴随解定性地看起来像与有头鸭相关的那些)。特别是, 我们的发现可能与最近的研究有关, 因为 PRC 分析起源于相位模型和等时性的研究 [70]。最近在 [71,72] 中对鸭解的等时线进行了数值研究, 并证明它们的性质在鸭解最大邻域附近发生变化; 这很可能与这里介绍的结果密切相关。虽然鸭解环相位特性的这两个方面的全面比较超出了目前工作的范围, 但它肯定是未来工作的一个有趣的主题。

在研究鸭解环伴随解的同时，我们还提出了一种基于数值连续的策略来计算这些对象在系统参数变化的情况下，即可靠地计算出伴随问题的一族极限环和一族周期解。利用 Auto 的边值解，可以很容易地识别出伴随问题解中经过最大鸭解时的翻转。我们的策略是用一步同伦方法来计算伴随方程与给定极限环相关的非平凡解，然后将该解和极限环作为扩展的周期连续问题继续进行，这比 Govaerts 和 Sautois 在 [60] 中为 MatCont 开发的问题更初级，因为它仅仅依赖于周期连续性，就可以研究感兴趣的对象。此外，我们的方法的简单性使它很容易适应其他系统，我们相信这对于 Auto 用户来说是一个有趣的计算。

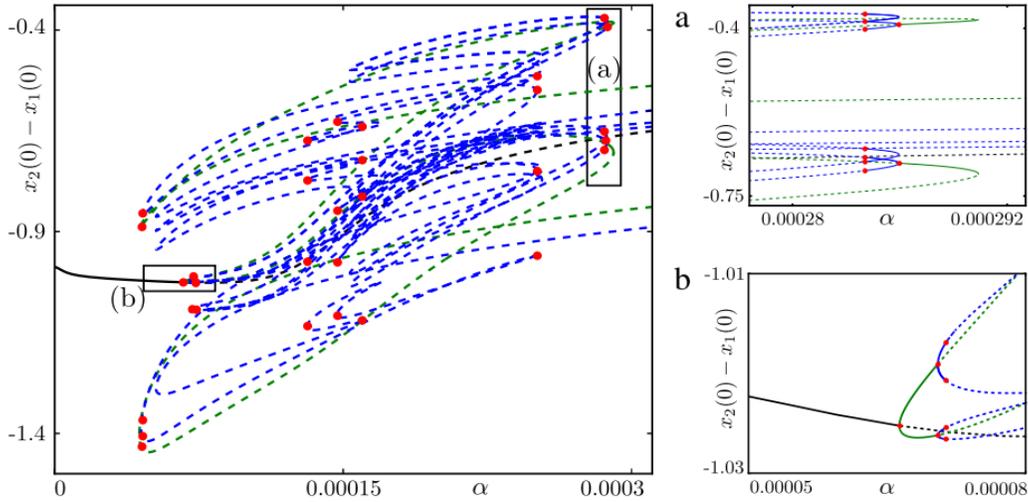


Figure 10: 最大鸭解状态下 FF 耦合 VDP 系统的  $\alpha$  延续: 图 9 中 PD 级联区域的放大视图 (大部分计算的 PD 分岔点用彩色点突出显示)。(对于图例中对颜色的解释, 请参阅本文的网络版本。)

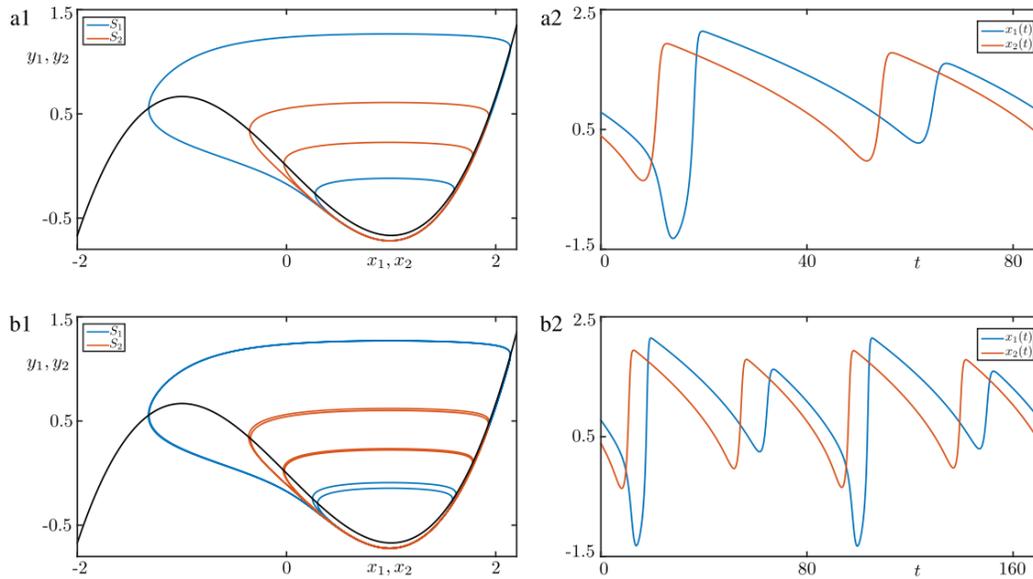


Figure 11: 周期  $2T$ (上图) 和周期  $4T$ (下图) 最大鸭解状态下 FF 耦合系统的非恒同 OP 同步状态, 说明了发放峰抑制情况。耦合强度  $\alpha$  值为  $2.86959 \times 10^{-4}$ , 图中 (a1) - (a2) 和  $2.85359 \times 10^{-4}$ , 面板 (b1)-(b2)。

在第 3 节中，我们研究了改变主系统参数时弱耦合恒同 VDP 系统的同步状态的分岔结构，在这种情况下，主系统参数控制慢零斜线的位置，但在神经元中可能是一个外界刺激电流。我们发现了 IP, AP 和 OP 状态的解分支的复杂结构，通过 PD 和叉型分岔连接起来，它们围绕最大鸭解组织起来。虽然已经知道弛豫环的同步性，但我们认为弱耦合鸭解的分

岔结构总体上是新颖的，特别是最大鸭解作为 IP, AP 和 OP 族的组织中心的作用。

在第 4 节中，我们重点研究了耦合恒同 VDP 系统在最大鸭解机制同步状态的分岔结构，该分岔结构依赖于耦合强度  $\alpha$ 。例如 [73,16,74] 已经研究了周期扰动下 VDP 类系统的 PD 分岔和混沌轨迹。在目前的研究中，我们揭示了一个复杂的  $2nT$ -周期分支，这表明附近存在混沌吸引子，我们选择不对其进行研究。相反，我们强调了进一步的同步状态，所有存在的接近最大的鸭解，而不是由标准的作用函数分析预测的。

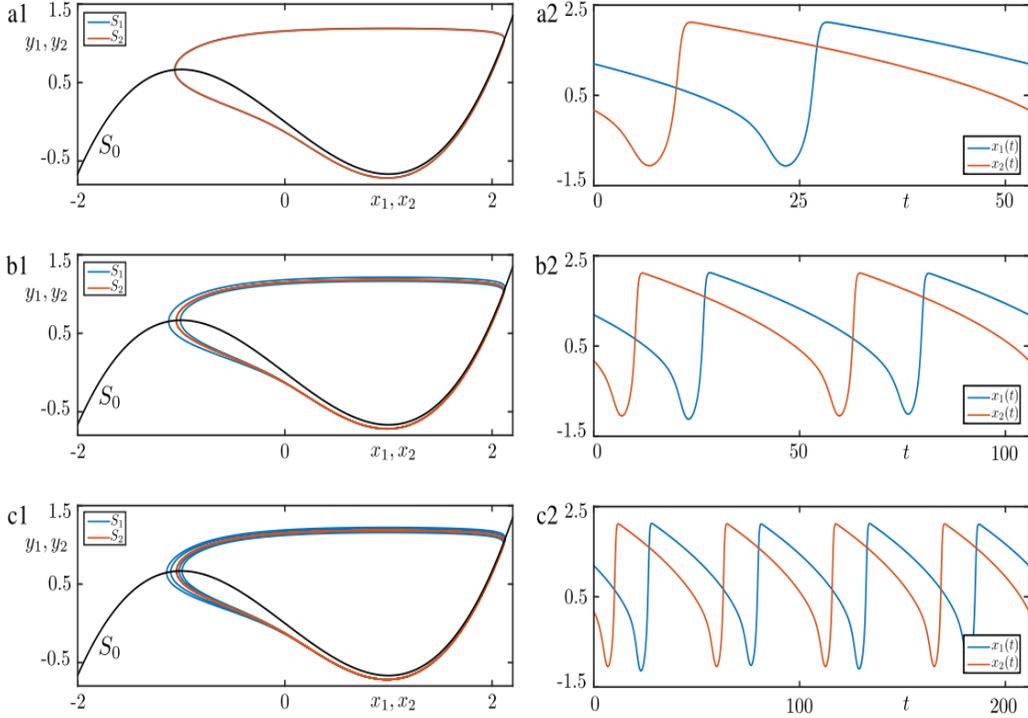


Figure 12: 周期  $T$ (顶部, 相同), 周期  $2T$ (中间, 不相同) 和周期  $4T$ (底部, 不相同) 在最大鸭解状态下 FF 耦合 VDP 系统的稳定 OP 同步状态。这些状态的相位差与作用函数分析一致。耦合强度  $\alpha$  值为  $6.63371 \times 10^{-5}$ , 面板 (a1) - (a2),  $7.04717 \times 10^{-5}$ , 面板 (b1) - (b2) 和  $7.13322 \times 10^{-5}$ , 面板 (c1) - (c2)。左面板: 投影到  $(x_i, y_i)$  平面上的轨迹。右面板:  $x_i$  坐标的时间序列。

由于接近最大鸭解，因此接近阈值，这些解可能包含靠近无头鸭解和靠近有头鸭解的通道，因此在阈下振荡和峰之间交替。即使在经典弱耦合理论不适用的情况下，单个鸭解振荡器的慢-快相位平面结构使人们能够理解为什么这种混合模式振荡的同步状态可以出现小到中等耦合强度下，这是由于几何形状和排斥慢流形族之间的接近。作为未来工作的一个问题，我们计划在神经元模型的背景下研究这些复杂同步状态的相关性，其中有头鸭可能被认为不是那么罕见的，而是作为慢激活的峰发放。

鸭解环的控制方面已经在 [75] 中进行了研究，其中作者已经获得了 MMOs, PD 双岔级联以及 FHN 型松弛振荡器中依赖于控制机制的混沌行为。开发控制策略以达到耦合系统中期望的峰值行为可能是我们未来的一个研究方向。

最后，作为附录，我们也给出了与 liencard 系统极限环相关的伴随解的解析公式，给出了无头鸭环的合理数值结果。

这项工作只是将鸭解研究扩展到弱耦合振荡器领域的第一步，更普遍的是扩展到弱连接网络。它还不是严格的，但我们已经确定了主要的几何结构，这些几何结构在形成鸭解机制下耦合平面慢系统的主要同步解族中起着至关重要的作用。此外，我们强调了最大鸭解在组织这类系统的同步特性中的中心作用。在兴奋性神经元模型中，最大鸭解被确定为峰发放阈值 [76,77]。

我们对弱耦合平面系统 (可兴奋神经元的简化模型) 的研究，通过将同步性、可兴奋性和最大鸭解的特性与鸭解爆炸的周期函数联系起来，强调了它们之间的关系。慢结构与弱耦合之间的相互作用，使这类简单的平面系统具有相当丰富的动力学特性。在高维的慢-快耦合系统以及更大的网络中，同步化、兴奋性和最大鸭解之间可能存在着类似联系，这是值得

关注的。除了鸭解爆炸动力学对同步的影响之外，我们计划在不久的将来研究在（至少三维）由折奇异点组织的鸭解系统中 [78] 以及在具有缓慢变化的量的系统中研究类似的效应，例如在加周期鸭解爆炸可能会对耦合簇振子的同步特性产生巨大的影响的系统中研究 [79,41]。

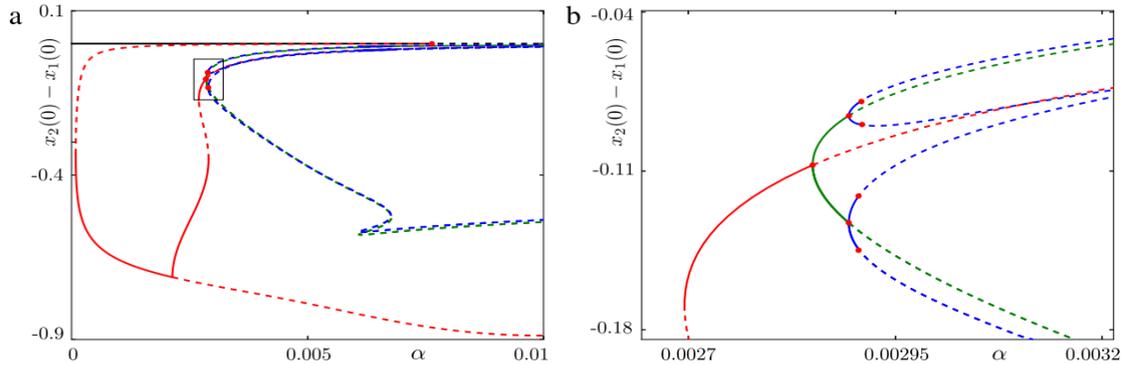


Figure 13: FS 耦合 VDP 系统的  $\alpha$  延拓。分岔点 (PD 分岔) 用红点表示。稳定分支 (实线) 和不稳定分支 (虚线) 分别为: T 周期分支 (黑色)、2T 周期分支 (红色)、4T 周期分支 (绿色) 和 8T 周期分支 (蓝色)。(对于图例中颜色的解释, 请参阅本文的网页版本。)

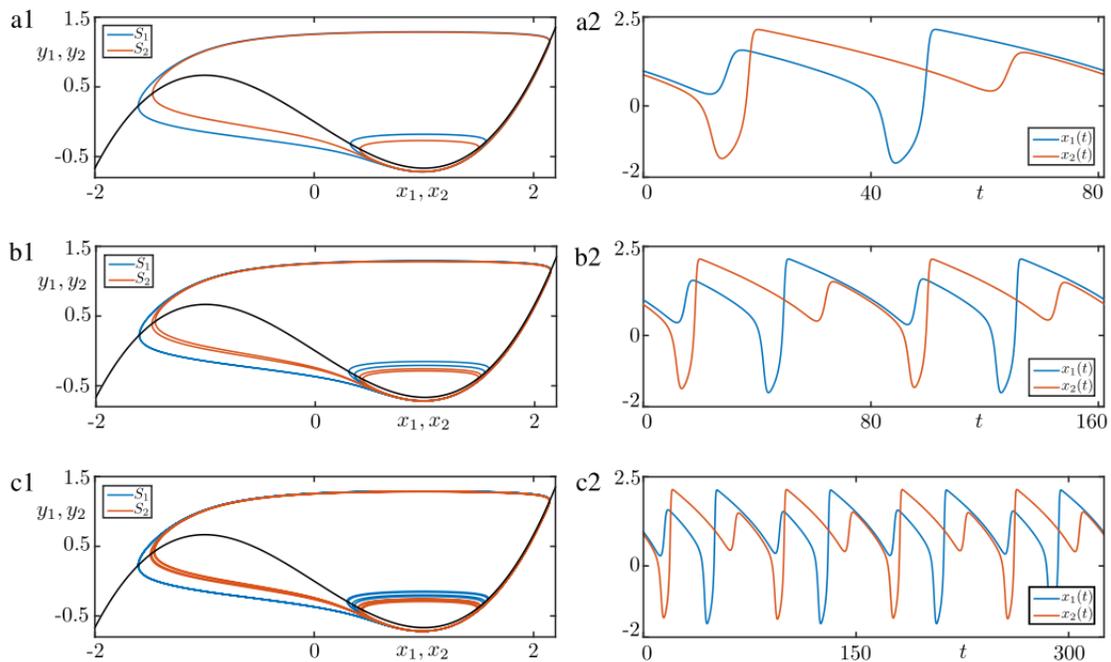


Figure 14: 周期 T(上图), 2T(中图) 和 4T(下图) 稳定的非相同 OP 同步状态, 显示 FS 耦合系统在最大鸭解区附近的峰值交替。耦合强度 值为  $2.8502655978 \times 10^{-3}$ , 面板 (a1) - (a2),  $2.8939484985 \times 10^{-3}$ , 面板 (b1) - (b2),  $2.9039987077 \times 10^{-3}$ , 面板 (c1) - (c2)。左面板: 投影到  $(x_i, y_i)$  平面上的轨迹。右面板:  $x_i$  坐标的时间序列。

## 6 附录：鸭解环伴随解的解析表达式

本文利用线性微分方程理论的经典结果 [80] 和 Schechter[81] 未发表的结果，推导出了与 liénard 系统的极限环相关的伴随问题的周期解的表达式。这扩展了 Izhikevich 在 [53] 中所采用的方法，他通过取极限  $\epsilon = 0$  来考虑弛豫环的情况。

Izhikevich 的公式不适用于鸭解环，因为鸭解环中存在产生鸭解动力学的临界流形  $S_0$  的折点，并且在计算伴随解时要求  $\epsilon \neq 0$ 。

我们考虑以下用 lienard 系统写的 VDP 型慢系统

$$\begin{aligned}x' &= y - f(x) := F(x, y) \\y' &= \epsilon(c - x) := \epsilon G(x, y),\end{aligned}$$

其中， $f(x) = x^3/3 - x$  是一个三次函数，点表示相对于快速时间  $t$  的微分。我们考虑系统的一个鸭解环的解 (A.1)，即一个周期解  $\gamma(t) = (x(\epsilon t), y(\epsilon t))$ 。沿  $\gamma$  与 (A.1) 相关联的线性化系统为

$$\begin{aligned}v' &= -f'(\gamma_1(t))v + w \\w' &= -\epsilon v\end{aligned}$$

我们可以把它改成一个二阶线性微分方程

$$v''(t) + f'(\gamma_1(t))v'(t) + (f''(\gamma_1(t)) + \epsilon)v(t) = 0$$

(A.3) 的一个明显的解是  $(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))$ 。回想一下，如果我们知道二阶线性微分的一个特解  $y_*$

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0$$

然后我们可以得到另一个解  $y_{\#}$ ，与第一个不成正比，因此与第一个形成一个解空间的基础，使用常数类型的变化公式，即，

$$y_{\#}(t) = u(t)y_*(t)$$

$u$  以一般积分的形式给出，为

$$u(t) = \int_0^t \frac{\exp\left(-\int_0^s p(\sigma)d\sigma\right)}{y^2(s)} ds.$$

因此，线性化系统的解  $(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))$  写成二阶等式 (A.3)，非比例解由  $(v(t), w(t))$  给出

$$\begin{aligned}v(t) &= u(t)\gamma_1'(t) \\&= \gamma_1'(t) \int_0^t \frac{\exp\left(-\int_0^s f'(\gamma_1(\sigma)) d\sigma\right)}{\gamma_1'^2(s)} ds \\w(t) &= v'(t) + f'(\gamma_1(t))v(t).\end{aligned}$$

因此我们有

$$\begin{aligned}w(t) &= u'(t)\gamma_1'(t) + u(t)(\gamma_1''(t) + f'(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)) \\&= \frac{\exp\left(-\int_0^t f'(\gamma_1(s)) ds\right)}{\gamma_1'(t)} + u(t)\gamma_2'(t).\end{aligned}$$

沿着极限环  $\gamma$  与系统 (A.1) 相关的伴随方程为

$$\dot{Z} = -J(\gamma(t))^T Z$$

其中  $Z$  是一个二维实向量， $J(\gamma(t))$  是沿解  $\gamma$  计算的雅可比矩阵。在 [81] 之后，我们将等式的解写入了等式 (A.7) 中

$$Z^T(t) = \exp\left(\int_0^t f'(\gamma_1(s)) ds\right) \begin{bmatrix} -s_2 & s_1 \end{bmatrix},$$

其中,  $s = (s_1, s_2)$  是线性化方程 (A.3) 的解。我们将这个公式应用于线性化方程的两个解  $(\gamma'_1(t), \gamma'_2(t))$  和  $(v(t), w(t))$ , 这给出了伴随方程的两个解。我们希望得到的是伴随问题的周期解; 为了得到它, 我们将使用 Schecter 策略找到一个合适的线性组合解, 施加周期性。也就是说, 我们将找到标量  $\alpha$  和  $\beta$  使得

$$\alpha Z_{\gamma'}(T) + \beta Z_s(T) = \alpha Z_{\gamma'}(0) + \beta Z_s(0),$$

其中  $\alpha$  和  $\beta$  为实数,  $Z_{\gamma'}$  和  $Z_s$  分别用公式 (A.8) 从上述极限环  $\gamma$  和上述  $(v(t), w(t))$  解的线性化得到。因此, 只关注第二个分量, 周期性条件 (A.9) 成为

$$\begin{aligned} & \alpha \exp\left(\int_0^T f'(\gamma_1(s)) ds\right) \gamma'_1(T) + \dots \\ & \beta \exp\left(\int_0^T f'(\gamma_1(s)) ds\right) \gamma'_1(T) \\ & \times \int_0^T \frac{\exp\left(-\int_0^s f'(\gamma_1(\sigma)) d\sigma\right)}{\gamma_1'^2(s)} ds = \alpha \gamma'_1(0). \end{aligned}$$

假设  $\gamma'$  本身是周期性的, 我们可以简化上述等式, 得到  $\alpha$  作为  $\beta$  的函数:

$$\alpha = \frac{-\beta \exp\left(\int_0^T f'(\gamma_1(s)) ds\right) \int_0^T \frac{\exp\left(-\int_0^s f'(\gamma_1(\sigma)) d\sigma\right)}{\gamma_1'^2(s)} ds}{\exp\left(\int_0^T p(s) ds\right) - 1}.$$

条件 (A.11) 给出了一个合适的线性组合的单参数族, 可以应用归一化得到伴随方程的周期解的唯一定义。

附录中分析结果的模拟。为了计算由 (A.8) 给出的伴随方程的解和线性化方程 (A.2) 的两个不同的解, 即  $\gamma'$  和  $(v, w)$ , 我们需要数值计算由积分公式 (A.4) 给出的函数  $u$ 。

$$P_f(t) = \exp\left(\int_0^t f'(\gamma_1(s)) ds\right).$$

要做到这一点, 一个简单的方法是把  $u$  写成二阶微分方程的解, 把  $P_f$  写成一阶微分方程的解, 用数值方法求解这些方程, 例如欧拉格式。更准确地说, 我们有

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{\exp\left(-\int_0^t f'(\gamma_1(s)) ds\right)}{\gamma_1'(t)^2} := h(t) \\ h'(t) &= -\left(f'(\gamma_1(t)) + 2\frac{\gamma_1''(t)}{\gamma_1'(t)}\right) h(t). \end{aligned}$$

相似的, 我们有

$$P_f'(t) = f'(\gamma_1(t)) P_f(t)$$

图 A.15 中显示的无头鸭解环 (图 1 左上角的 1-4 轨道) 的伴随方程的解与通过数值延延得到的解具有相同的定性行为 (图 1 左上角 1-4), 其中解的振幅非单调变化, 具有不同的幅度。事实上, (A.13)-(A.15) 的数值非常敏感, 如图 A.15 中 4 所示, 其中在  $Z_2$  曲线的最大值附近出现了模糊的快振荡。人们可以通过减小 ODE 求解器的步长来消除这些伪振荡, 但是它会导致所有解的振幅不准确。在这方面, 需要改进数值技术的鲁棒性和最优性。

公式的极限: 我们提出的策略克服了由于临界流形上存在折点而导致的奇异性, 但它也有局限性。首先, 对于无头鸭解, 用该公式近似鸭解环的伴随解可以被认为是成功的 (见图 A.15), 但是在数值模拟中需要非常小心。然而, 即使如此小心, 我们仍然无法用这个公式计算与大鸭解相关的伴随。这样做的原因可以通过查看 (A.13) 中的表达式来理解, 当  $\gamma_1'(t)$  时, 即在  $\gamma$  的极值处, 它是奇异的。我们可以试着把这些方程的解分成排除极值的两个分支来积分。有了这个策略, 我们的公式可以用来计算所有鸭解环的伴随, 从而扩展了 Izhikevich 的方法。公式 (A.8) 的第二个缺点是, 它对所用的系统采用了一种 liendard 形式。因此, 它不能直接适用于更一般的平面慢-快系统, 特别是生物物理神经元模型, 如我们在 2.2.2 节中考虑的 HH 系统的二维简化版本一样。

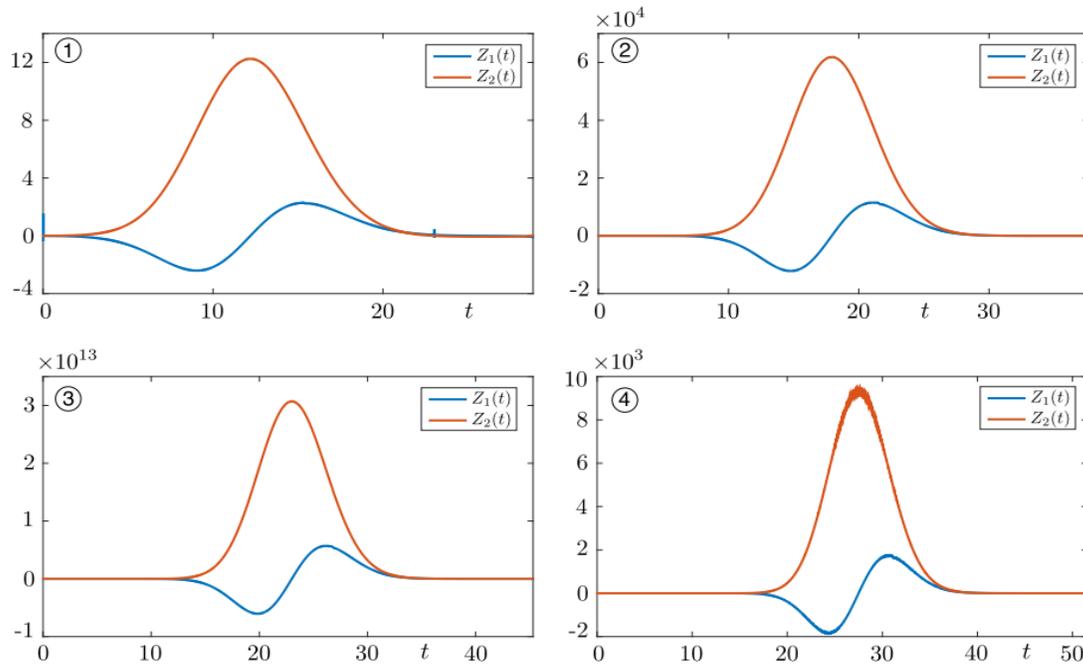


Figure 15: 图 1 所示无头鸭解环的伴随解使用公式 (A.8) 解析计算。蓝色曲线: $Z_1$ 。红色曲线: $Z_2$ 。(对于图例中有关颜色的解释, 请参阅本文的网络版本。)

## 参考文献

- [1] B. Ermentrout, N. Kopell, Frequency plateaus in a chain of weakly coupled oscillators, *SIAM J. Math. Anal.* 15 (1984) 215-237.
- [2] C. van Vreeswijk, L. Abbot, B. Ermentrout, When inhibition not excitation synchronizes neural firing, *J. Comput. Neurosci.* 1 (1994) 313-321.
- [3] B. Ermentrout, D. Terman, *Mathematical Foundations of Neuroscience*, Springer, 2010.
- [4] F. Hoppensteadt, E. Izhikevich, *Weakly Connected Neuroal Networks*, Springer, 1997.
- [5] N.W. Schulthesis, A.A. Prinz, R.J. Butera (Eds.), *Phase Response Curves in Neuroscience: Theory, Experiment, and Analysis*, in: Springer Series in Computational Neuroscience, vol. 6, Springer, New York, 2012.
- [6] P. Ashwin, S. Coombes, R. Nicks, Mathematical framework for oscillatory network dynamics in neuroscience, *J. Nonlinear Sci.* 6 (2) (2016) 1-92.
- [7] I. Malkin, *Methods of Poincare and Liapunov in Theory of Non-Linear Oscillations*, Gostexizdat, 1949.
- [8] I. Malkin, *Some Problems in Nonlinear Oscillation Theory*, Gostexizdat, 1956.
- [9] A. Buică, J.-P. Françoise, J. Libre, Periodic solutions of nonlinear periodic differential systems with a small parameter, *Comm. Pure Appl. Math.* 6 (1) (2007) 103-111.
- [10] M. Roseau, *Vibrations Nonlinéaires et Théorie de la Stabilité*, Springer-Verlag, Berlin, 1966. E. Köksal Ersöz et al./P
- [11] J.-P. Françoise, *Oscillations en Biologie: Analyse Qualitative et Modèles*, Springer-Verlag, 2005.
- [12] S.M. Crook, B. Ermentrout, J.M. Bower, Spike frequency affects the synchronization properties of networks of cortical oscillators, *Neural Comput.* 10 (1998) 1643-1678.
- [13] C.C. Chow, N. Kopell, Dynamics of spiking neurons with electrical coupling, *Neural Comput.* 12 (2000) 1643-1678.
- [14] T. Lewis, J. Rinzel, Dynamics of spiking neurons connected by both inhibitory and electrical coupling, *J. Comput. Neurosci.* 14 (2003) 283-309.
- [15] A. Urban, B. Ermentrout, Formation of antiwaves in gap-junction-coupled chains of neurons, *Phys. Rev. E* 86 (2012) 011907.

- [16] M. Feingold, D.L. Gonzalez, O. Piro, H. Vitturo, Phase locking, period doubling, and chaotic phenomena in externally driven excitable systems, *Phys. Rev. A* 37 (10) (1988) 4060-4063.
- [17] D.G. Aronson, B. Ermentrout, N. Kopell, Amplitude response of coupled oscillators, *Physica D* 41 (1990) 403-449.
- [18] B. Ermentrout, N. Kopell, Mechanisms of phase-locking and frequency control in pairs of coupled neural oscillators, in: B. Fiedler (Ed.), *Handbook of Dynamical Systems II: Towards Applications*, Elsevier, 2002, pp. 5-54.
- [19] B. Ermentrout, Type I membranes, phase resetting curves and synchrony, *Neural Comput.* 8 (1996) 979-1001.
- [20] D. Hansel, G. Mato, C. Meunier, Synchrony in excitatory neural networks, *Neural Comput.* 7 (1995) 307-337.
- [21] B. Ermentrout, M. Pascal, B. Gutkin, The effects of spike frequency adaptation and negative feedback on the synchronization of neural oscillators, *Neural Comput.* 13 (2001) 1285-1310.
- [22] I.Z. Kiss, Y. Zhai, J.L. Hudson, Predicting mutual entrainment of oscillators with experiment-based phase models, *Phys. Rev. Lett.* 94 (2005) 248301.
- [23] M. Wickramasinghe, I.Z. Kiss, Spatially organized dynamical states in chemical oscillator networks: Synchronization, dynamical differentiation, and chimera patterns, *PLoS One* 8 (11)(2013) e80586.
- [24] J. Belair, P. Holmes, On linearly coupled relaxation oscillators, *Quart. Appl. Math.* 42 (1984) 193-219.
- [25] T. Bem, J. Rinzel, Short duty cycle destabilizes a half-center oscillator, but gap junctions can restabilize the anti-phase pattern, *J. Neurophysiol.* 91 (2004) 693-703.
- [26] T. Chakraborty, R. Rand, The transitions from phase locking to drift in a system of two weakly coupled van der Pol oscillators, *Internat. J. Non-Linear Mech* 23 (56) (1988) 369-376.
- [27] G. Cymbalyuk, E. Nikolaev, R. Borisjuk, In-phase and antiphase selfoscillations in a model of two electrically coupled pacemakers, *Biol. Cybernet.* 71 (1994) 153-160.
- [28] A. Sherman, J. Rinzel, Rhythmogenic effects of weak electrotonic coupling in neuronal models, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 89 (1992) 2471-2474.
- [29] N. Kopell, D. Somers, Anti-phase solutions in relaxation oscillators coupled through excitatory interactions, *J. Math. Biol.* 33 (1995) 261-280.
- [30] D. Terman, E. Lee, J. Rinzel, T. Bem, Stability of anti-phase and in-phase locking by electrical coupling but not fast inhibition alone, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 10 (3) (2011) 1127-1153.
- [31] B. Pfeuty, G. Mato, D. Golomb, D. Hansel, The combined effects of inhibitory and electrical synapses in synchrony, *Neural Comput.* 17 (2005) 633-670.
- [32] [32] J. Mancilla, T. Lewis, D. Pinto, J. Rubin, C.B.W. , Synchronization of electrically coupled pairs of inhibitory interneurons in neocortex, *J. Neurosci.* 27 (8)(2007)
- [33] S. Coombes, Phase-locking in networks of pulse-coupled McKean relaxation oscillators, *Physica D* 160 (2001) 173-188.
- [34] S. Coombes, Neuronal networks with gap junctions: A study of piecewise linear planar neuron models, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 7 (3) (2008) 1101-1129.
- [35] E. Benoît, J.-L. Callot, F. Diener, M. Diener, Chasse au canard, *Collect. Math.* 32 (1-2) (1981) 37-119.
- [36] M. Krupa, P. Szmolyan, Relaxation oscillation and canard explosion, *J. Differential Equations* 174 (2) (2001) 312-368.
- [37] M. Brøns, Bifurcations and instabilities in the Greitzer model for compressor system surge, *Math. Eng. Ind.* 2 (1988) 51-63.
- [38] M. Krupa, M. Wechselberger, Local analysis near a folded saddle-node singularity, *J. Differential Equations* 248 (2010) 2841-2888.
- [39] J. Guckenheimer, K. Hoffman, W. Weckesser, Numerical computation of canards, *Internat. J. Bifur. Chaos* 10 (12)(2000) 2669-2687.
- [40] M. Desroches, J. Guckenheimer, B. Krauskopf, C. Kuehn, H.M. Osinga, M. Wechselberger, Mixed-mode oscillations in a multiple time scale, *SIAM Rev.* 54 (2012) 211-288.
- [41] M. Desroches, T.J. Kaper, M. Krupa, Mixed-mode bursting oscillations: Dynamics created by a slow passage through spike-adding canard explosion in a square-wave burster, *Chaos* 23 (2013) 046106
- [42] T. Vo, R. Bertram, M. Wechselberger, Multiple geometric viewpoints of mixed mode dynamics associated with pseudo-plateau bursting, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 12 (2) (2013) 789-830.

- [43] M. Krupa, N. Popovic, N. Kopell, H.G. Rotstein, Mixed-mode oscillations in a three time-scale model for the dopaminergic neuron, *Chaos* 18 (49) (2008) 015106.
- [44] H.G. Rotstein, T. Oppermann, J.A. White, N. Kopell, The dynamic structure underlying subthreshold oscillatory activity and the onset of spikes in a model of medial entorhinal cortex stellate cells, *J. Comput. Neurosci.* 21 (2006)
- [45] J. Rubin, M. Wechselberger, Giant squid-hidden canard: the 3D geometry of the Hodgkin-Huxley model, *Biol. Cybernet.* 97 (2007) 5-32.
- [46] J. Drover, J. Rubin, J. Su, B. Ermentrout, Analysis of a canard mechanism by which excitatory synaptic coupling can synchronize neurons at low firing frequencies, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 65 (1) (2004) 69-92.
- [47] B. Ermentrout, M. Wechselberger, Canards, clusters and synchronization in a weakly coupled interneuron model, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 8 (2009) 253-278.
- [48] K.-L. Roberts, J. Rubin, M. Wechselberger, Averaging, folded singularities and torus canards: Explaining transitions between bursting and spiking in a coupled neuron model, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 14 (4) (2015) 1808-1844.
- [49] H.G. Rotstein, N. Kopell, A.M. Zhabotinsky, I.R. Epstein, A canard mechanism for localization in systems of globally coupled oscillators, *SIAM J. Appl. Math.* 63 (6) (2003) 1998-2019.
- [50] H.G. Rotstein, R. Kuske, Localized and asynchronous patterns via canards in coupled calcium oscillators, *Physica D* 215 (2006) 46-61.
- [51] E. Köksal Ersöz, M. Desroches, M. Krupa, F. Clément, Canard-mediated (de)synchronization in coupled phantom bursters, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 15 (1) (2016) 580-608.
- [52] E. Brown, J. Moehlis, P. Holmes, On the phase reduction and response dynamics of neural oscillator populations, *Neural Comput.* 16 (2003) 673-715.
- [53] E.M. Izhikevich, Phase equations for relaxation oscillators, *SIAM J. Appl. Math.* 60(5)(2000) 1789-1805.
- [54] R. Curtu, A. Shpiro, N. Rubin, J. Rinzel, Mechanisms for frequency control in neural competition models, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 7 (2) (2008) 609-649.
- [55] C. Zhang, T. Lewis, Phase response properties of half-center oscillators, *J. Comput. Neurosci.* 35 (2013) 55-74.
- [56] T. Netoff, C. Acker, J. Bettencourt, J.A. White, Beyond two-cell networks: experimental measurement of neuronal responses to multiple synaptic inputs, *J. Comput. Neurosci.* 18 (2005) 287-295.
- [57] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillators, Waves, and Turbulence*, Springer-Verlag, 1984.
- [58] B. Ermentrout, *Simulating, Analyzing, and Animating Dynamical Systems: a Guide to XPPAUT for Researchers and Students*, SIAM, 2002.
- [59] E.M. Izhikevich, F.C. Hoppensteadt, Slowly coupled oscillators: phase dynamics and synchronization, *SIAM J. Appl. Math.* 63 (6) (2003) 1935-1953.
- [60] W. Govaerts, B. Sautois, Computation of the phase response curve: A direct numerical approach, *Neural Comput.* 18 (4) (2006) 817-847.
- [61] E.J. Doedel, A.R. Champneys, F. Dercole, T. Fairgrieve, Y. Kuznetsov, B.E. Oldeman, R. Paffenroth, B. Sandstede, X.J. Wang, auto-07p: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations, available at 2007, <http://cmvl.cs.concordia.ca/auto>.
- [62] B. Ermentrout, B. Beverlin, T. Netoff, Phase response curves to measure ion channel effects on neurons, in: N.W. Schultheiss, A.A. Prinz, R.J. Butera (Eds.), *Phase Response Curves in Neuroscience*, Springer, 2012, pp. 207-236.
- [63] J. Moehlis, Canards for a reduction of Hodgkin-Huxley equations, *J. Math. Biol.* 52 (2006) 141-153.
- [64] P. De Maesschalck, M. Desroches, Numerical continuation techniques for planar slow-fast systems, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 12 (3) (2013) 1159-1180.
- [65] P. Ashwin, J. Swift, The dynamics of  $n$  weakly coupled identical oscillators, *J. Nonlinear Sci.* 2 (1992) 69-108.
- [66] D. Somers, N. Kopell, Rapid transition through fast threshold modulation, *Biol. Cybernet.* 68 (1993) 393-407.
- [67] E. Lee, D. Terman, Stable antiphase oscillations in a network of electrically coupled neurons, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 12 (1)(2013) 1-27.

- [68] M. Oh, V. Matveev, Loss of phase-locking in non-weakly coupled inhibitory networks of type-I model neurons, *J. Comput. Neurosci.* 26 (2009) 303-320.
- [69] S. Maran, C. Canavier, Using phase resetting to predict 1:1 and 2:2 locking in two neuron networks in which firing order is not always preserved, *J. Comput. Neurosci.* 24 (2008) 37-55.
- [70] A.T. Winfree, *The Geometry of Biological Time*, in: *Interdisciplinary Applied Mathematics*, vol. 12, Springer, 1980.
- [71] P. Langfield, B. Krauskopf, H.M. Osinga, Solving Winfree's puzzle: The isochrons in the FitzHugh-Nagumo model, *Chaos* 24 (2014) 013131.
- [72] P. Langfield, B. Krauskopf, H.M. Osinga, Forward-time and backward-time isochrons and their interactions, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 14 (3) (2015) 1418-1453.
- [73] G. Ermentrout, Period doublings and possible chaos in neural models, *SIAM J. Appl. Math.* 44 (1) (1984) 80-95.
- [74] I.B. Schwartz, T. Erneux, Subharmonic hysteresis and period doubling bifurcations for a periodically driven laser, *SIAM J. Appl. Math.* 54 (4) (1994) 1083-1100.
- [75] J. Durham, J. Moehlis, Feedback control of canards, *Chaos* 18 (2008) 015110.
- [76] M. Desroches, M. Krupa, S. Rodrigues, Inflection, canards and excitability threshold in neuronal models, *J. Math. Biol.* 67 (2013) 989-1017.
- [77] J. Mitry, M. McCarthy, N. Kopell, M. Wechselberger, Excitable neurons, firing threshold manifolds and canards, *J. Math. Neurosci.* 3 (12) (2013).
- [78] M. Krupa, B. Ambrosio, M.A. Aziz-Alaoui, Weakly coupled two-slow-two-fast systems, folded singularities and mixed mode oscillations, *Nonlinearity* 27 (7) (2014) 1555-1574.
- [79] G. de Vries, A. Sherman, Beyond synchronization: Modulatory and emergent effects of coupling in square-wave bursting, in: S. Coombes, P.C. Bressloff (Eds.), *Bursting: The Genesis of Rhythm in the Nervous System*, World Scientific, 2005, pp. 243-272.
- [80] E.A. Coddington, N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, 1987.
- [81] S. Schecter, Adjoint equation and Melnikov function.